Translation of *A fascination for counting* : *Tanuj Shah* From Azim Premji University At Right Angles_July, 2013

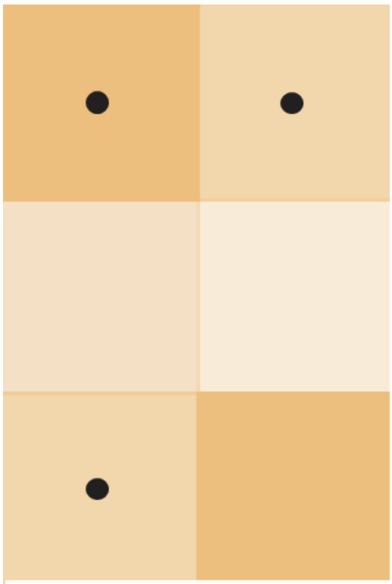
कक्षा के भीतर

गणित क्लब

गिनती के प्रति आकर्षण

तनुज शाह

हम कई सालों से कक्षा सातवीं के विद्यार्थियों के लिए अपने स्कूल में गणित क्लब चला रहे हैं। हम हर हफ़्ते एक घण्टे के लिए मिलते हैं। हमें लगता है कि इस उम्र में विद्यार्थियों को विषय को अधिक गहराई से समझने की ज़रूरत होती है और वास्तविक जीवन के अनुप्रयोगों के साथ सम्बन्ध बनाने की गहरी इच्छा होती है। वे इस उम्र में विषय के सौन्दर्य की सराहना करने में भी सक्षम होते हैं। यह क्लब सभी के लिए खुला है चाहे उनकी गणितीय क्षमता कुछ भी हो। गणित क्लब का मक़सद है उन रास्तों को खोलना जिनसे गणित को देखते हैं और गणित की ताक़त व सौन्दर्य से अवगत कराने में उनकी मदद करना। एक ऐसा विषय है जो विद्यार्थियों को आकर्षित करने में कभी नहीं चूकता है और वह है गिनती। यह हर तरह की क्षमता वाले विद्यार्थियों की पहुँच में होता है और पैटर्न भी जल्दी उजागर हो जाता है।



चित्र–1

दिलचस्प विवरण और सन्दर्भ देना ज़रूरी होता है। हम बातचीत की शुरुआत इस बात से करते हैं कि नेत्रहीन लोग कैसे पढ़ पाते हैं। कोई सुझाव देता है कि अक्षरों को काग़ज़ पर उभारा जा सकता है। कोई अन्य असहमति जताते हुए कहता है कि पढ़ने का यह तरीक़ा बहुत कार्यक्षम नहीं है और किसी नेत्रहीन व्यक्ति को अगर एक-एक अक्षर महसूस करना पड़े तो इसमें काफ़ी समय लगेगा। इस बिन्दु पर किसी ने कहा कि उसने ब्रेल क़िताबें देखी हैं, जो सिर्फ़ बिन्दुओं से लिखी होती हैं। बच्चों को बताया जाता है कि ब्रेल के हर अक्षर को 2x3 के एक आयत में बिन्दुओं को किसी ख़ास पैटर्न में उभारकर दर्शाया जाता है। हर अक्षर को दर्शाने का केवल एक ही तरीक़ा है। उदाहरण के लिए 'm' अक्षर को **चित्र-1** में दर्शाया गया है।

अब बच्चों को यह पता लगाने का कार्य सौंपा जाता है कि 2x3 की आयताकार ग्रिड में इस तरीक़े से कितने अक्षरों को दर्शाया जा सकता है, अर्थात बिन्दुओं और ख़ाली स्थानों के कितने अलग-अलग पैटर्न हैं। कुछ समय बाद हम सब इकट्ठा होकर चर्चा करते हैं कि इस काम को

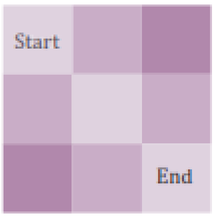
करने में कौन-कौन से तरीक़े अपनाए गए और उन्हें किस तरह की मुश्किलों का सामना करना पड़ा। यहाँ यह भी समझ में आया कि इसमें सम्भावनाओं की संख्या बड़ी है और इस बात का सत्यापन करना कठिन है कि हमने सारी सम्भावनाएँ ढूँढ़ ली हैं। कोई सुझाव देता है कि इसे व्यवस्थित तरीक़े से करना कारगर हो सकता है; 0 बिन्दु, 1 बिन्दु, 2 बिन्दु आदि सम्भावनाओं को अलग-अलग देखें और फिर सबको एक साथ जोड़ दें। 0 बिन्दु को दर्शाने का एक ही तरीक़ा है। 1 बिन्दु में हमें यह दिखता है कि उस एक बिन्दु को छह में से किसी भी एक चौख़ाने में रखा जा सकता है, इसलिए इसमें छह सम्भावनाएँ है। 2 बिन्दुओं के लिए इसे व्यवस्थित तरीक़े से करने की ज़रूरत है। एक बिन्दु को बारी-बारी सभी छह चौख़ानों में स्थिर रखकर दूसरे बिन्दु को अलग-अलग चौख़ानों में रखते हुए ध्यान रखना होगा कि किसी भी सम्भावना का दोहराव न हो। यहाँ हमें 15 सम्भावनाएँ मिलती हैं (व्यवस्थित गिनती करके हमें यह देखने को मिलता है कि यह 5+4+3+2+1 है)। जैसे-जैसे हम सम्भावनाएँ लिखना शुरू करते हैं बच्चों को एक दिलचस्प परावर्तीय सममिति (Reflective Symmetry) का पैटर्न दिखने लगता है। कोई इस ओर ध्यान दिलाता है कि चार बिन्दु का मामला, दो बिन्दुओं का दर्पण प्रतिबिम्ब है; अन्तर बस इतना है कि बिन्दु और ख़ाली स्थान एक-दूसरे के विपरीत हैं। हम परिणामों को एक तालिका में दर्शाते हैं;

बिन्दुओं की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
सम्भावनाओं की संख्या	1	6	15	20	15	6	1

सम्भावनाओं का अन्तिम क्रम कुछ इस प्रकार था; 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 यानी सम्भावनाओं की कुल संख्या 64 थी। लेकिन किसी का कहना था कि हमें अंक तालिका में 0 बिन्दु वाली स्थिति को अनदेखा कर देना चाहिए क्योंकि उससे नेत्रहीन लोग भ्रमित हो सकते हैं। तो हम 63 सम्भावनाओं पर आ पहुँचे। यह सवाल उठाया जाता है कि क्या ब्रेल 2x3 के अलावा दूसरे आयतों पर भी काम कर सकती है? हम इस सवाल को अगले हफ़्ते देखने का फ़ैसला करते हैं।

जब हम फिर से मिलते हैं तो उन्हें चार पट्टियों वाला एक ख़ाली झण्डा दिखाया जाता है। फिर शिक्षक यह सवाल पूछते हैं कि अगर हमें सिर्फ़ लाल और काले रंग का इस्तेमाल करने की अनुमति हो तो इस झण्डे को रंगने के कितने तरीक़े हो सकते हैं (यह स्पष्ट कर दिया जाता है कि झण्डे की कोई भी पट्टी ख़ाली नहीं छोड़ी जा सकती है)। पाँच मिनट के बाद हम दोबारा इकट्ठा होते हैं और इस बारे में चर्चा करते हैं कि सब अपने काम किस तरीक़े से कर रहे हैं। कई को पिछले हफ़्ते इसे व्यवस्थित तरीक़े से करने का सुझाव याद था, पहले एक रंग से शुरुआत करते हुए। अर्थात कितने झण्डे 0 (शून्य) लाल पट्टी के साथ सम्भव हैं, कितने 1

लाल पट्टी के साथ और कितने 2 लाल पट्टियों के साथ आदि। इस काम को करने के लिए कुछ और समय दिया गया। जो बच्चे अपना काम जल्दी ख़त्म कर लेते हैं उन्हें पाँच पट्टियों वाले झण्डे की पड़ताल करने को कहा जाता है। जब हम थोड़ी देर के बाद इकट्ठा होते हैं तो हमें दिखता है कि हमें चार पट्टियों वाले झण्डे में एक परावर्तीय पैटर्न नज़र आता है; 1, 4, 6, 4, 1 और सम्भावनाओं की कुल संख्या 16 है। किसी का ध्यान इस बात पर जाता है कि यह पिछले हफ़्ते वाले सवाल से मिलता-जुलता है। हमें यह दिखाई देता है कि दोनों मामलों में दो सम्भावनाएँ थीं – पहले मामले में बिन्दु या ख़ाली स्थान और दूसरे मामले में लाल या काला रंग। इस बात की खोज का बच्चों पर ज़ोरदार प्रभाव पड़ा क्योंकि अब वे दो सम्भावनाओं वाली परिस्थितियों को हल करने के लिए एक मॉडल बना सकते थे। जो सवाल हमने पहले सत्र के अन्त में उठाया था उसका जवाब अब हम दे सकते थे। हम ब्रेल में लिखने के लिए अलग आकार के आयत का इस्तेमाल कर तो सकते थे; मगर हम सारे अक्षरों को 2x3 से छोटे आयत में दर्शा नहीं पाएँगे। जिन्होंने 5 पट्टी वाली समस्या को हल करने की कोशिश की थी, उन्होंने बताया कि उसमें 32 सम्भावनाएँ हैं।



चित्र–2

अलबत्ता, यह पूरी वर्णमाला व विराम चिह्नों को दर्शाने के लिए पर्याप्त नहीं होगी। हम सभी निष्कर्षों को सिलसिलेवार लिखने का निर्णय लेते हैं और देखते हैं कि क्या हमें कोई और पैटर्न दिखता है।

चार पट्टियों वाली समस्या	1	4	6	4	1		
पाँच पट्टियों वाली समस्या	1	5	10	10	5	1	
छह पट्टियों वाली समस्या	1	6	15	20	15	6	1

ज़्यादातर बच्चे जल्दी ही पास्कल के त्रिकोण को पहचान लेते हैं। उन्हें पास्कल के त्रिकोण के बारे में पहले बताया जा चुका था। इस विषय में अभी भी काफ़ी रुचि है इसलिए अगले सत्र में भी इस पर बात करने के वादे के साथ सत्र समाप्त किया।

तीसरे सत्र में हम एक वर्गाकार ग्रिड में रास्तों की संख्याओं का पता लगाने की कोशिश करते हैं जिसमें ग्रिड के एक कोने से शुरू करके दूसरे कोने तक पहुँचना है। यहाँ शर्त केवल एक ही है कि किसी ख़ाने में दोबारा नहीं जा सकते। हम एक कोने के चौख़ाने (Start) से शुरुआत करके या तो नीचे या फिर दाहिने जाकर विकर्ण की सीध में बने विपरीत कोने के चौख़ाने (End) तक पहुँचते हैं। हर क़दम पर या तो आप नीचे जा सकते हैं या फिर दाईं ओर (**चित्र-2** देखिए)। कितने सम्भव रास्ते हैं?

Start	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20

चित्र–3

अगर हम वर्गाकार ग्रिड के हर चौख़ाने तक पहुँचने के सम्भव रास्तों की संख्याएँ लिखने लगें तो एक बहुत ही दिलचस्प पैटर्न उभरकर आता है जैसा कि **चित्र-3** में दर्शाया गया है।

बच्चे एक बार फिर से पास्कल के त्रिकोण को पहचानने में ज़रा-सी भी देर नहीं लगाते और यह देखकर मुग्ध हो जाते हैं कि यह इतने अप्रत्याशित तरीक़ों से सामने आता है। बाद में जब बच्चे अलग-अलग सूचकांकों के साथ द्विपद व्यंजन (Binomial expression) का विस्तार करने का प्रयास करेंगे तो उन्हें यह पैटर्न फिर से देखकर काफ़ी सन्तुष्टि महसूस होगी। अगर समय की अनुमति हो तो अलग-अलग संख्या में सिक्के उछालकर चित या पट के आने के परिणामों को भी देखा जा सकता है।

इस तीन पाठों की शृंखला में उन्हें पैटर्न खोजने में मज़ा आया होगा और गणना में इस प्रकार आने वाली परिस्थितियों को पहचानने और उनसे निपटने की क्षमता विकसित हुई होगी।

ब्रेल समस्या पर काम करते वक़्त, रुचि के स्तर के आधार पर, कई सारे दिलचस्प पहलुओं पर बातचीत हो सकती है। लुई ब्रेल की जीवनी पर भी बात हो सकती है, बच्चों को यह भी बताया जा सकता है कि पहले आयताकार ग्रिड बड़े हुआ करते थे और इससे पढ़ने में कठिनाई हुआ करती थी, फिर लुई ब्रेल ने मानक 2x3 का ग्रिड पेश किया। नेत्रहीनों के लिए गणित के प्रस्तुतीकरण व संगीत की स्वर लिपि (Music Score) को पढ़ने के लिए एक अलग भाषा भी है।

तनुज शाह ऋषि वैली स्कूल में गणित पढ़ाते हैं। उन्हें गणित को सभी के लिए दिलचस्प और सुलभ बनाने में गहरी रुचि है और उन्होंने जूनियर स्कूल के लिए ख़ुद से सीखने के मॉड्यूल तैयार किए हैं। तनुज शाह ने अपना शिक्षक प्रशिक्षण नॉटिंघम विश्वविद्यालय से प्राप्त किया है और ऋषि वैली से जुड़ने से पहले इंग्लैंड के कई विद्यालयों में पढ़ाया है। इनसे tanuj@rishivalley.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : सोमेश केलकर **पुनरीक्षण** : सुशील जोशी

कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन** : राजेश उत्साही